1 ΘΕΜΑ Α

Α1)Η απόδειξη βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 63 (Απόδειξη 1)
Α2)Ορισμός σχολικού βιβλίου στη σελίδα 62.
Α3) (α΄):Σωστό, (β΄): Λάθος, (γ΄):Σωστό, (δ΄):Σωστό, (ε΄):Σωστό

2 ΘΕΜΑ Β

Β1α΄) Για κάθε $x\,,y\in\mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}2\,(x^2+y^2)\geq(x+y)^2 &\iff 2\,x^2+2\,y^2\geq x^2+2\,x\,y+y^2\\ &\iff 2\,x^2+2\,y^2-x^2-2\,x\,y-y^2\geq 0\\ &\iff x^2+y^2-2\,x\,y\geq 0\\ &\iff (x-y)^2\geq 0\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανίσωση αληθεύει. Η ισότητα ισχύει μόνο αν

$$(x-y)^2=0 \iff x-y=0 \iff x=y.$$

Β1β΄)Αν $2<x<5$ τότε έχουμε $x-2>0$ και $5-x>0$, οπότε η παράσταση B γίνεται $B=2\,(x-2)-3\,(5-x)=2\,x-4-15+3\,x=5\,x-19.$
Β2α΄)Για κάθε $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\,|\alpha\,\beta| \iff |\alpha|^2+|\beta|^2-2\,|\alpha|\,|\beta|\geq 0 \iff (|\alpha|-|\beta|)^2\geq 0$$

όπου η τελευταία ανίσωση αληθεύει.
Β2β΄)Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}2\,x^2+y^2+9=2\,x(3-y) &\iff 2\,x^2+y^2+9=6\,x-2\,x\,y\\ &\iff 2\,x^2+y^2+9-6\,x+2\,x\,y=0\\ &\iff (x^2+y^2+2\,x\,y)+(x^2-6\,x+9)=0\\ &\iff (x+y)^2+(x-3)^2=0\\ &\iff x+y=0\ \kappa\alpha\iota\ x-3=0\\ &\iff x=3\ \kappa\alpha\iota\ y=-3\end{aligned}$$

Β2γ΄) Έχουμε

$$A=|3-\pi|+|\pi-4|=\pi-3+4-\pi=1$$

$$B=|-x^2-1|-|x^2+5|=x^2+1-(x^2+5)=x^2+1-x^2-5=-4$$

$$\Gamma=|x^2-4\,x+4|-|x^2-2\,x+3|=(x-2)^2-|(x-1)^2+2|=(x-2)^2-(x-1)^2-2=-2\,x+1$$

3 ΘΕΜΑ Γ

Γ1)Για κάθε $x\,,y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x\,|y| + |x|\,|y| \geq |x|\,y + x\,y &\iff x\,|y| + |x|\,|y| - |x|\,y - x\,y \geq 0 \\ &\iff |y|(x+|x|) - y(x+|x|) \geq 0 \\ &\iff (x+|x|)\,(|y|-y) \geq 0 \end{aligned}$$

και η τελευταία είναι αληθής διότι $|x| \geq -x$ και $|y| \geq y$.
Γ2)Παρατηρούμε ότι $K = \dfrac{x^2-1}{|x|+1} = \dfrac{|x|^2-1}{|x|+1} = \dfrac{(|x|-1)\,(|x|+1)}{|x|+1} = |x|-1$ και

$$M = \frac{x^2+4\,|x|+4}{|x|+2} = \frac{|x|^2+4\,|x|+4}{|x|+2} = \frac{(|x|+2)^2}{|x|+2} = |x|+2$$

οπότε $K - M = |x| - 1 - |x| - 2 = -3$.
Γ3α΄) Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό την τριγωνική ανισότητα $|a+b| \leq |a| + |b|\,, a\,, b \in \mathbb{R}$.
Αν την εφαρμόσουμε για $a = 3\,x - y\,, b = 2\,x - 4\,y$ παίρνουμε

$$|3\,x-y|+|2\,x-4\,y| \geq |(3\,x-y)+(2\,x-4\,y)| = |5\,x-5\,y| = |5(x-y)| = 5\,|x-y| = 5\cdot 8 = 40$$

Γ3β΄)Ισχύει $x - y = 8$, άρα $x = y + 8$. Έχουμε διαδοχικά, $x\,y \geq -16 \iff (y+8)\,y \geq -16 \iff y^2 + 8\,y + 16 \geq 0 \iff (y+4)^2 \geq 0$ και η τελευταία ισχύει.

4 ΘΕΜΑ Δ

Δ1)Έχουμε $\beta > 2 \implies 2\cdot\beta > 2\cdot 4 \implies 2\,\beta > 4 \implies 2\,\beta - 4 > 0$. Επίσης, $\alpha < 2 \implies 3\,\alpha < 3\cdot 2 \implies 3\,\alpha < 6\,(1)$. Επίσης, $2\,\beta > 4 \implies -2\,\beta < -4\,(2)$. Προσθέτοντας τις $(1)\,,(2)$ κατά μέλη προκύπτει ότι $3\,\alpha - 2\,\beta < 2$ και προσθέτοντας το -4 και στα δύο μέλη παίρνουμε $3\,\alpha - 2\,\beta - 4 < -2 < 0$. Μετά από αυτά η παράσταση A γίνεται $A = 2\,\beta - 4 - (-3\,\alpha + 2\,\beta + 4) = 2\,\beta - 4 + 3\,\alpha - 2\,\beta - 4 = 3\,\alpha - 8$.
Δ2α΄)Είναι $-4 < y < -2 \overset{\cdot(-1)<0}{\implies} 4 > -y > 2 \implies 2 < -y < 4$. Τώρα στις σχέσεις $1 < x < 3$ και $2 < -y < 4$ όλοι οι όροι είναι θετικοί. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει $2 < x\cdot(-y) < 12 \implies 2 < -x\,y < 12$.
Δ2β΄) Έχουμε $1 < x < 3$ και από το Δ2α΄) επίσης $2 < -y < 4$. Με πρόσθεση κατα μέλη προκύπτει $3 < x - y < 7$.
Δ2γ΄) Από το Δ2α΄) έχουμε $2 < -x\,y < 12$, άρα ο $-x\,y$ είναι θετικός αριθμός και κατά συνέπεια $x^2 - x\,y + y^2 > 0$ (ως άθροισμα θετικών). Επίσης, αφού ο $-x\,y$ είναι θετικό, έπεται ότι ο $x\,y$ είναι αρνητικός. Έτσι, η παράσταση F γίνεται $F = x^2 - x\,y + y^2 - x\,y = x^2 - 2\,x\,y + y^2 = (x-y)^2$, όπως θέλαμε. Από Δ2β΄) ισχύει $3 < x - y < 7$ και εφ΄όσον όλοι οι όροι είναι θετικοί, υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε $3^2 < (x-y)^2 < 7^2 \implies 9 < F < 49$.
Δ3) Θα χρησιμοποιήσουμε τις βασικές ανισότητες $|a| \geq -a$ και $|a| \geq a$ για κάθε αριθμό a. Επομένως,

$$\begin{aligned} G &= ||x-1| - x + 1| + ||x| + x| \\ &= ||x-1| - (x-1)| + ||x| + x| \\ &= |x-1| - (x-1) + |x| + x \\ &= |x-1| + |x| + 1 \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:
1η) Για $x \leq 0$ είναι επίσης $x - 1 < 0$, οπότε $G = 1 - x - x + 1 = -2\,x$.
2η) Για $0 < x < 1$ ισχύει $x - 1 < 0$, άρα $G = 1 - x + x + 1 = 2$.
3η) Για $x \geq 1$ ισχύει $x - 1 \geq 0$ και έχουμε $G = x - 1 + x + 1 = 2\,x$. Συνοπτικά έχουμε

$$G = \begin{cases} -2\,x & , x \leq 0 \\ \quad 2 & , 0 < x < 1 \\ 2\,x & , x \geq 1 \end{cases}$$